Dimostrazione per induzione

Per $n = 1$:

$$2^1 = 2 \geq 1 + 1 = 2$$

Supponiamo che la proprietà sia vera per un certo $n = k$, cioè:

$$2^k \geq k + 1$$

(ipotesi induttiva)

dobbiamo dimostrare che vale anche per $n = k + 1$:

$$2^{k+1} \geq (k + 1) + 1 = k + 2$$

sappiamo che $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$

per l'ipotesi induttiva $2^k \geq k + 1$, otteniamo:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2(k + 1) = 2k + 2$$

per verificare che $2k + 2 \geq k + 2$, basta notare che:

$$2k + 2 - (k + 2) = k \geq 0$$

che risulta vero per ogni $k \geq 0$

quindi:

$$2^{k+1} \geq k + 2$$

per il principio di induzione

$$2^n \geq n + 1$$

è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$