UNIVERSITÀ DI PARMA

logica delle proposizioni

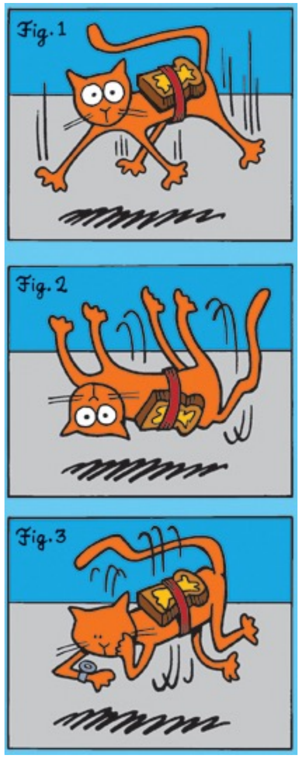
proposizioni

- proposizione = frase dichiarativa (***enunciato***) di senso compiuto che può essere riconosciuta come *Vera* o ***Falsa***
- principi delle proposizioni:
  - ***non contraddizione***:
    - un enunciato non può essere contemporaneamente Vero e Falso
  - ***terzo escluso*** (tertium non datur):
    - un enunciato è Vero o Falso, non esiste una terza possibilità
- ***sono*** proposizioni:
  - «Il gatto è un felino»
  - «2 > 3»
  - «I quadrati hanno tre angoli»
- ***non sono*** proposizioni:
  - «Il gatto della vicina»
  - «Se 2 < 3»
  - «La porta è aperta?»

paradosso

- ***paradosso*** = affermazione o situazione che sembra logicamente contraddittoria o contraria al senso comune
- «Io sto mentendo»
- «Questa frase è falsa»

- Un gatto cade sempre sulle zampe,
  ossia cade sempre in piedi e mai sulla schiena.
  Una fetta di pane imburrata cade sempre
  dalla parte del burro



proposizioni e connettivi logici

- operatori booleani per legare proposizioni in forma più complessa
  - “e” (congiunzione, ∧)
  - “o” (disgiunzione, ∨)
  - “non” (negazione, ¬)
- date le seguenti proposizioni:
  - $P1$:= «Gold is in Chest1»
  - $P2$:= «Gold is in Chest2»
  - $P3$:= «Gold is in Chest3»

$$\neg P_2 \land (P_1 \lor P_3) \land \neg P_3 \equiv P_1 \land \neg P_2 \land \neg P_3$$

implicazione logica

- implicazione logica (connettivo condizionale)
- esprime il legame “se … allora”
- esempio: «se penso allora esisto»
- P := «penso», Q := «esisto»
- $P \Longrightarrow Q$ = «Se penso allora esisto»
- “P è ***condizione sufficiente*** per Q” (se P è Vera, allora Q è Vera)
- “Q è ***condizione necessaria*** per P” (se Q è Falsa, allora P è Falsa)
- l’implicazione ***non*** soddisfa la proprietà commutativa: $(P \Longrightarrow Q) \neq (Q \Longrightarrow P)$.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$\neg P \vee Q$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	T

doppia implicazione

- doppia implicazione $P \Leftrightarrow Q$
  - esprime l'equivalenza logica.
- "P se e solo se Q"
- "P ***condizione necessaria e sufficiente*** per Q"

P	Q	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$P \iff Q$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
T	T	T	T	T	T

deduzione logica

- un ***teorema*** si riconduce all'implicazione $P \Rightarrow Q$
  - P (ipotesi): proposizione che si assume vera
  - Q (tesi): proposizione di cui si vuole dedurre la verità
- ***dimostrazione*** (processo di deduzione logica)
  - dimostrazione diretta (modus ponens)
  - dimostrazione per assurdo (modus tollens)

dimostrazione diretta

- ***modus ponens***

Premesse	Conclusione
$(P \implies Q)$ Vera	Q Vera
P Vera	

«se piove la strada è bagnata» , «piove» …

$$[(p \to q) \wedge p] \to q$$

il solo fatto di sapere che $P \Longrightarrow Q$ sia Vera non consente di concludere niente, né su P, né su Q

dimostrazione per assurdo

- ***modus tollens***

$$P \implies Q \qquad \neg Q \implies \neg P$$

P	Q	$P \implies Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \implies \neg P$
F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F
T	T	T	F	F	T

Premesse	Conclusione
$(\neg Q \implies \neg P)$ Vera	Q Vera
P Vera	

dimostrazione per assurdo - esempio

- teorema: «Se il prodotto di due numeri è diverso da 0, allora entrambi sono diversi da 0»
- $P := m \cdot n \neq 0$
- $Q := (m \neq 0) \land (n \neq 0)$
- $P \Longrightarrow Q$

- per assurdo: $\neg Q \Longrightarrow \neg P$
- $\neg Q := (m = 0) \lor (n = 0)$
- $\neg P := m \cdot n = 0$

🔷 Regola del Modus Ponens

Se $a \rightarrow b$ e a è vera, allora b è vera.

(Se una condizione è vera, e da essa segue una conseguenza, allora la conseguenza è vera.)

🔷 Esempio concreto

1. Se **usa ChatGPT all'esame**, allora **è bocciato**. $(a \rightarrow b)$
2. **Usa ChatGPT all'esame.** (a)
3. **Quindi è bocciato.** (b)

UNIVERSITÀ DI PARMA

🔷 Regola del Modus Tollens

Se $a \to b$ e $\neg b$ è vera, allora $\neg a$ è vera.

(Se da una condizione segue una conseguenza, e la conseguenza non avviene, allora la condizione non era vera.)

🔷 Esempio concreto

1. Se **usa ChatGPT all'esame**, allora **è bocciato**. $(a \to b)$
2. **Non è bocciato.** $(\neg b)$
3. **Quindi non ha usato ChatGPT all'esame.** $(\neg a)$